Corps noir, Loi de Planck et Fond Diffus Cosmologique

Vincent Boudon

6 novembre 2016

Un *corps noir* est un objet idéal, en équilibre thermique, absorbant uniformément toutes les longueurs d'onde et dont le spectre d'émission électromagnétique ne dépend que de la température.

Max Planck a formulé en 1900 une loi, dite *Loi de Planck*, qui exprime la *luminance énergétique spectrale* d'un corps noir. Cette quantité représente la puissance (en W) émise par unité de surface (en m^2) du corps noir, par unité d'angle solide (en stéradians, sr) et par élement spectral. Il y a deux expressions possibles pour cette loi, selon la manière dont cette luminance est mesurée.

— Si on considère un spectromètre *dispersif* (à prisme ou à réseau), alors la luminance est donnée par unité de longueur d'onde. En effet, un tel dispositif enregistre un spectre selon une *échelle linéaire en longueur d'onde* λ. La loi de Planck dans ce cas est alors donné par :

$$L_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}, \tag{1}$$

en $\mathrm{W.m^{-2}sr^{-1}m^{-1}}$ et où $h = 6.62606957(29) \times 10^{-34}$ J.s est la constante de Planck, $c = 299792458$ $\mathrm{m.s^{-1}}$ est la vitesse de la lumière dans le vide, $k_B = 1.3806488(13) \times 10^{-23}$ $\mathrm{J.K^{-1}}$ et la constante de Boltzmann et T la température (en K). La figure 1 illustre cette loi pour quelques températures typiques de surfaces d'étoiles. En dérivant l'expression (1), on montre facilement [1] que la longueur d'onde son maximum, $\lambda_{\max}$,

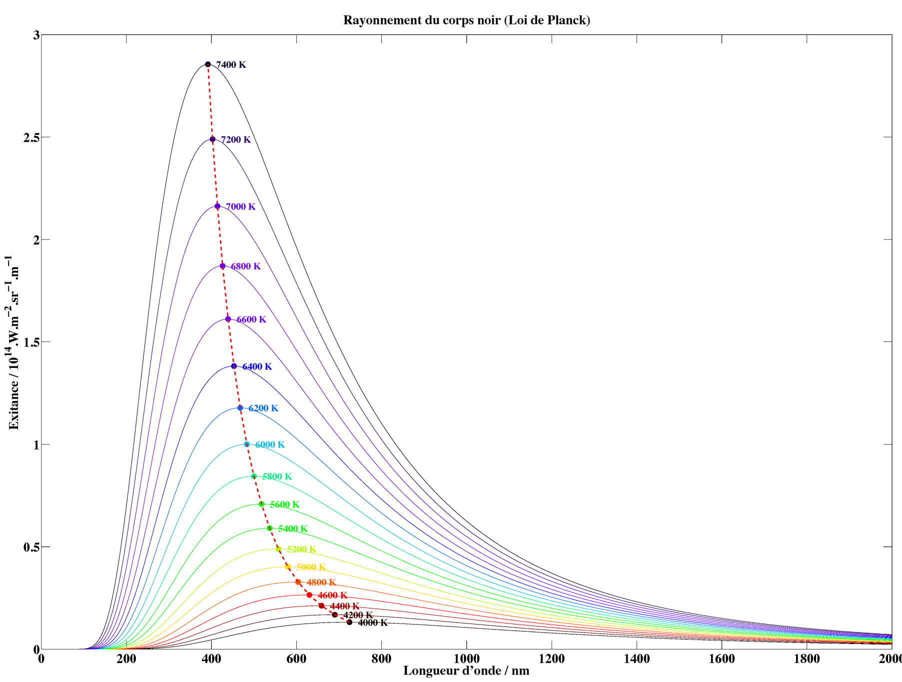

FIGURE 1 – Loi de planck $L_\lambda(T)$ pour différentes températures.

dépend elle aussi uniquement de sa longueur d'onde, selon la *loi du déplacement de Wien* :

$$\lambda_{\max} = \frac{2.989 \times 10^{-3}}{T}. \tag{2}$$

— Si on considère un spectromètre utilisant une *échelle linéaire en fréquence* (à transformée de Fourier, par exemple), alors la luminance est donnée par unité de fréquence ν (en Hz, ou d'énergie E en J, ou de nombre d'onde $\widetilde{\nu}$ en cm^{-1}, ces quantités étant directement proportionnelles, puisque $E = h\nu = hc\widetilde{\nu}$). La loi de Planck dans ce cas est alors donnée par :

$$L_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \tag{3}$$

en $\mathrm{W.m^{-2}sr^{-1}Hz^{-1}}$. Dans ce cas, on montre [2] que la fréquence ou le nombre d'onde du maximum de (3) sont directement proportionnels à T selon la loi :

$$\widetilde{\nu}_{\max} = \frac{\nu_{\max}}{c} = 1.9609821\ T, \tag{4}$$

qui est différente de la loi du déplacement de Wien (2).

On passe de l'expression (1) à l'expression (3) en considrant que l'énergie mise par élément spectral est constante, soit :

$$L_\lambda(T)\,|d\lambda| = L_\nu(T)\,|d\nu|\,, \tag{5}$$

et sachant que $\lambda = c/\nu$, soit $d\lambda/d\nu = -c/\nu^2$.

—

Le *fond diffus cosmologique micro-onde* (en anglais, *cosmic microwave background*, ou CMB) correspond à une rayonnement de corps noir quasiment parfait, comme l'illustre la figure 2.

COBE utilisant une spectromètre à transformée de Fourier, il a mesuré une série de points régulièrment espacés en nombre d'onde. La courbe ainsi mesurée correspond donc à l'expression (3) de $L_{\widetilde{\nu}}(T)$, avec $\widetilde{\nu} = \nu/c$. Sur cette courbe, $\widetilde{\nu}_{\max} \simeq 5.344\ \mathrm{cm}^{-1}$, ce qui correspond, selon la loi (4) à $T \simeq 2.725$ K [3]. Sur la figure 2, la loi de Planck simulée à cette température reproduit parfaitement les mesures.

Il convient donc de savoir comment la mesure du spectre a été effectuée, afin de déterminer si l'on doit utiliser les expressions (1) et (2) ou bien (3) et (4). Ainsi, il serait faux de prendre le maximum de la courbe de la figure 2, soit $\widetilde{\nu}_{\max} \simeq 5.344\ \mathrm{cm}^{-1}$, de convertir cette valeur en longueur d'onde et d'utiliser le loi du déplacement de Wien (2). Il faut au contraire, dans ce cas, utiliser la loi (4). En effet, comme $\widetilde{\nu} = 1/\lambda$, la mesure n'a pas été effectuée selon une échelle linéaire en longueur d'onde λ. Ceci est illustré sur la figure 3, sur laquelle le panneau du bas donne la courbe $L_\lambda(T)$ recalculée à partir de la courbe $L_\nu(T)$ (panneau du haut et figure 2), à l'aide de la relation (5). Ceci fait, le maximum de $L_\lambda(T)$ correspond alors bien à la loi du déplacement de Wien (2).

1. En posant $x = \dfrac{hc}{k_B \lambda T}$, la dérivée de (1) s'annule pour $e^{-x} + \dfrac{x}{5} - 1 = 0$, dont la solution numérique est $x \simeq 4.9651$.
2. En posant $x = \dfrac{h\nu}{k_B \lambda T}$, la dérivée de (3) s'annule pour $e^{-x} + \dfrac{x}{3} - 1 = 0$, dont la solution numérqiue est $x \simeq 2.82144$.
3. La vraie tempérture étant 2.728 K, quelques corrections devant être effectuées.

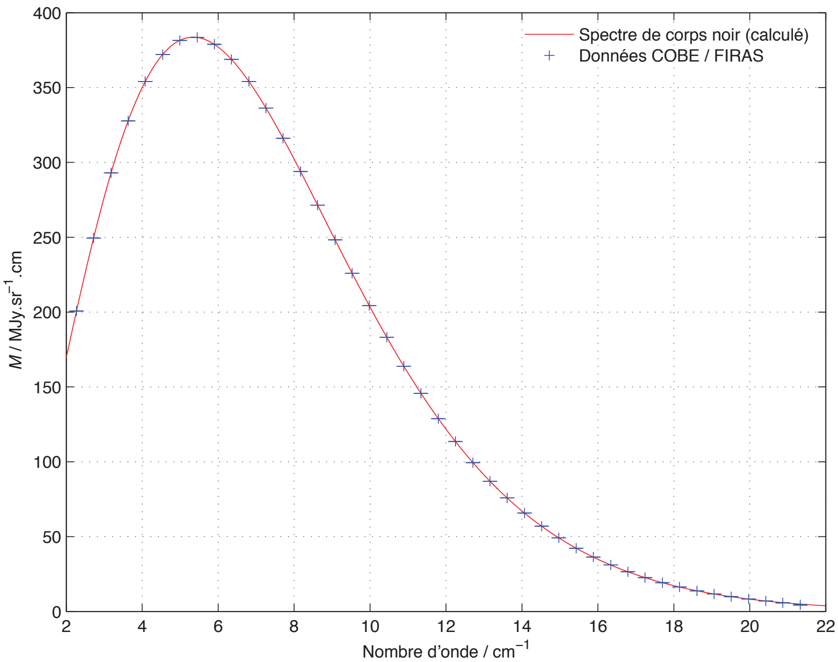

FIGURE 2 – Mesure du spectre du CMB (croix bleues) par le satellite COBE (NASA), comparée àun spectre théorique de corps noir (courbe rouge). A noter (échelle des ordonnées) que le Jansky est dfini par 1 Jy = 10^{-28} W.m^{-2}.Hz^{-1}.

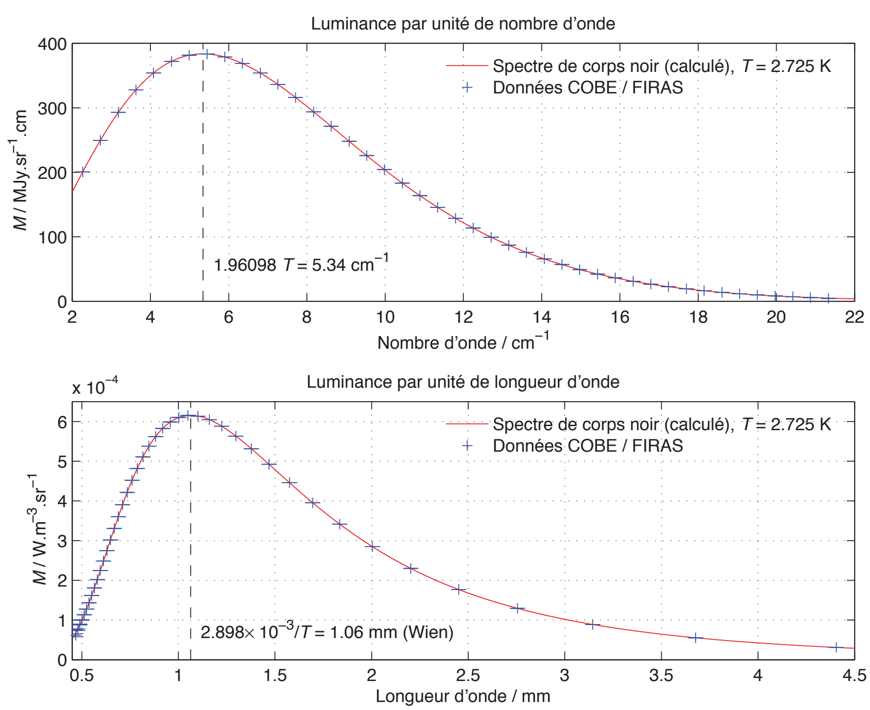

FIGURE 3 – Spectre du CMB en nombre d'onde et en longueur d'onde.