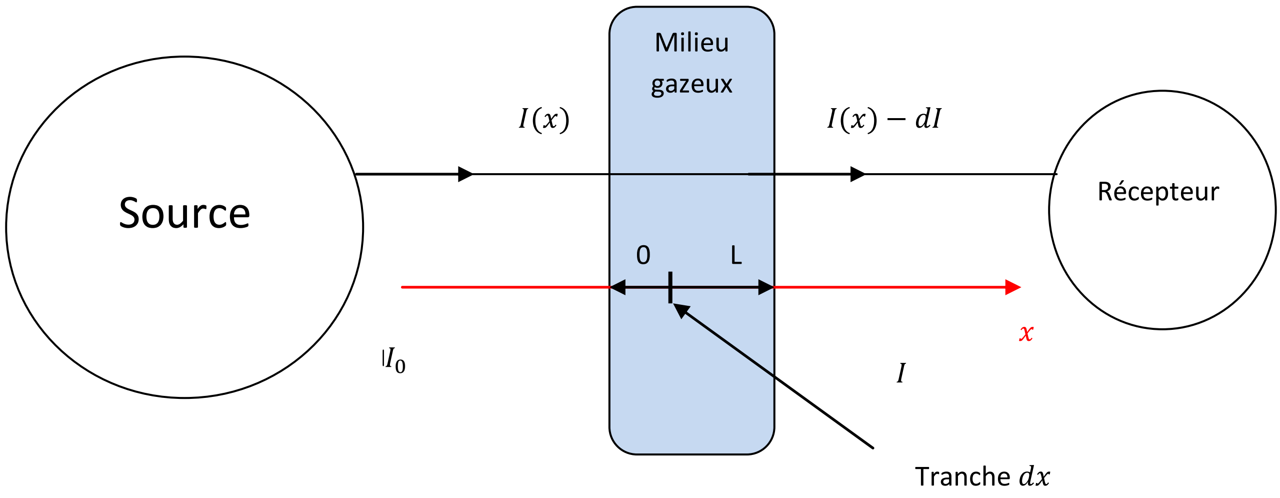
Démonstration de la loi de Beer-Lambert

On considère une source de lumière (par exemple le Soleil) dont les rayons, au cours de leur trajet dans le vide, traversent un milieu gazeux (par exemple l'atmosphère d'une planète) d'épaisseur L dont le coefficient d'absorption est α avant d'atteindre un détecteur. On cherche à calculer l'intensité $I(\lambda)$transmise par ce milieu et reçue par le détecteur, en fonction de l'intensité de la source $I_0(\lambda)$, de L et de λ.



La lumière parcourt une distance de longueur L.
Elle se déplace selon x entre $x = 0$ et $x = L$.
On coupe cette distance en tranches d'épaisseur infinitésimale dx. Chaque tranche dx reçoit à la position x une intensité $I(\lambda, x)$où I dépend également de λ. Chaque tranche produit une variation infinitésimale dI.

On sait que :

- $dI < 0$ car de la lumière est absorbée
- dI est proportionnelle à dx et à I
- Le milieu traversé absorbe avec un coefficient α qui dépend de λ
- dI est proportionnelle à α

On en déduit que $dI = -I \times \alpha \times dx$

Puis :

$\frac{dI}{dx} = I'(x)$

On cherche I pour $I'(x) = I \times (-\alpha)$

Soit C une constante :

$$(Cexp(-\alpha x))' = -\alpha Cexp(-\alpha x)$$

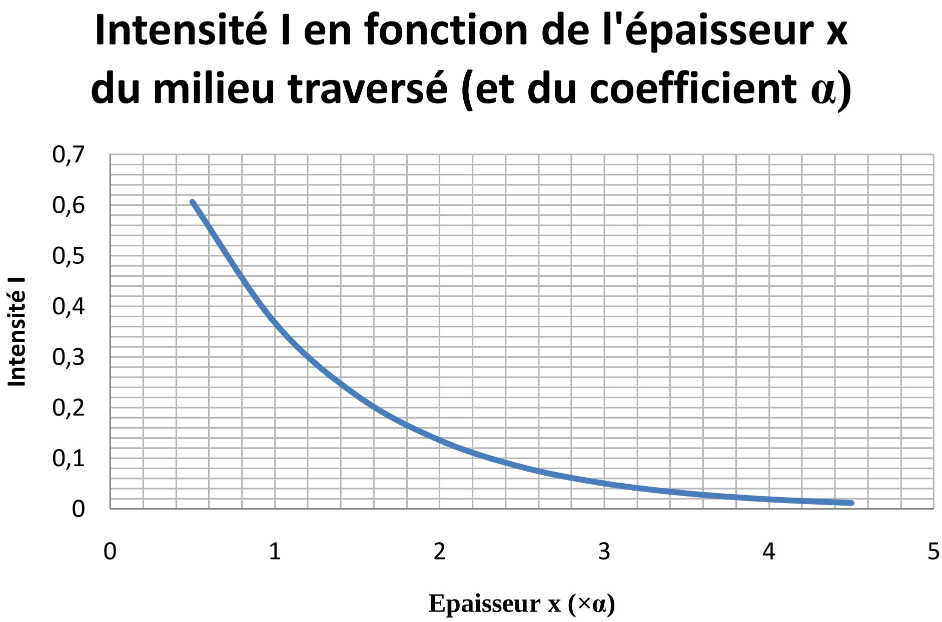
Donc $I = Cexp(-\alpha x)$

En $x = 0, I = I0$
Or, $exp(0) = 1$
Donc en $x = 0$, $C = I0$

$$I = I_0 exp(-\alpha x)$$

C’est la loi de Beer-Lambert : l’effet de traversée d’un milieu est multiplicatif et non additif.
Pour l’atmosphère de Jupiter, on a donc $exp(-\alpha L)$ pour $x = L$

<u>Exemple :</u>
On définit $I_0 = 1$ et pour un λ quelconque $\alpha = 0{,}5$



αx	exp(-αx)	5	0,00673795
0	1	5,5	0,00408677
0,5	0,60653066	6	0,00247875
1	0,36787944	6,5	0,00150344
1,5	0,22313016	7	0,00091188
2	0,13533528	7,5	0,00055308
2,5	0,082085	8	0,00033546
3	0,04978707	8,5	0,00020347
3,5	0,03019738	9	0,00012341
4	0,01831564	9,5	7,4852E-05
4,5	0,011109	10	4,54E-05

Quand l'épaisseur du milieu traversé augmente, l'intensité I diminue exponentiellement.
Lorsque $I = 0$, on dit que la raie est saturée.
Si $\alpha = 0$ pour un λ, alors $I = I_0$ et le milieu est transparent à cette longueur d'onde.